

数学科(数学Ⅱ)学習指導案

平 2 7 年 6 月 2 4 日 第 3 限
埼玉県立越谷南高等学校 2 年 5・6・7 組
指 導 者 教 諭 荒 船 康 雄

1 単元名 新編数学Ⅱ [数研出版] 第 5 章 指数関数と対数関数

2 単元について

指数関数、対数関数は三角関数とともに、数学においては基本的な関数であるが、対数などの新たな概念や定義、記号や用語の取り扱いが必要であることから、生徒にとってはなかなか理解しにくい単元のひとつである。しかしながら、自然科学や社会学など多くの分野で活用されており、身近な現象を考察するのに役立つ考え方である。また、指数関数の発散性に関心を抱いたり、対数を扱うことで、大きな数を小さな数で扱うことができたり、極めて桁の大きい数の積や商を和や差を用いた式に変形して計算することができたりと、数学を学ぶことの意義を感じやすい単元でもある。この単元では、実生活にある題材をできるだけ取り入れ、数学的な見方や考え方のよさを認識させ、生徒の興味・関心を高めたい。

3 単元の目標及び評価規準

(1) 単元の目標

指数関数及び対数関数について理解し、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を養うとともに、それらを活用する態度を育てる。

第 1 節 指数関数

1 指数の拡張

累乗の意味を理解し、指数を正の整数から整数全体、有理数全体、実数へと拡張する。その過程で、累乗根を導入する。

2 指数の性質

指数関数 $y=a^x$ を定義し、諸性質を調べる。また、指数関数の増減を利用して、累乗根の大小を調べたり、指数方程式、指数不等式を解く。

第 2 節 対関数数

3 対数とその性質

対数を定義し、その基本性質を理解させる。

4 対数関数

対数関数 $y=\log_a x$ を指数関数と対比させながら、その諸性質を調べる。また、対数関数の増減を利用して、対数方程式、対数不等式を解く。

5 常用対数

対数の中でも特別な常用対数を導入し、その応用例として、桁数に関する問題を扱う。

(2) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
数学的活動を通して、指数関数・対数関数の考え方に関心をもつとともに、数学のよさを認識し、それらを事象の考察に活用して数学的な考え方に基づいて判断しようとする。	数学的活動を通して、指数関数・対数関数の考えにおいて、事象を数学的に考察し表現したり、思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して、数学的な見方や考え方を身に付けている。	指数関数・対数関数の考えにおいて、事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	指数関数・対数関数の考えにおける基本的な概念、原理・法則などを体系的に理解し、基礎的な知識を身に付けている。

4 指導と評価の計画

	授業内容	学習活動における具体の評価規準	評価方法
第1 ～2時	指数の拡張 整数の指数 累乗根 有理数の指数	指数の範囲を正の整数から実数にまで拡張していることを考察することができる。〔見〕 累乗根の定義を理解し、累乗根の性質を考察することができる。〔見〕〔知〕 指数が有理数の場合の累乗の定義を理解し、累乗の計算や、指数法則を利用した計算、累乗根を含む計算をすることができる。〔知〕〔技〕	観察・課題 小テスト 小テスト
第3 ～4時	指数関数 指数関数 $y=a^x$ のグラフ 指数関数の特徴 指数関数を含む方程式、不等式	指数関数のグラフの概形を、点をプロットしてかこうとする意欲がある。〔関〕 指数関数のグラフの概形、特徴を理解している。〔知〕 指数関数の増減によって、大小関係や方程式・不等式を考察することができる、底と1の大小に注意して、指数関数を含む不等式を解くことができる。〔見〕〔技〕	観察・課題 観察・課題 小テスト
	対数とその性質 対数 対数の性質	対数の意味と必要性を理解し、対数の性質を考察することができる。〔見〕〔知〕 対数の性質に基づいた種々の対数の値の計算ができる。〔知〕〔技〕 x 軸方向、 y 軸方向に平行移動した指数関数のグラフをかくことができる。〔技〕 $a^x > 0$ に注意して、おき換えによって指数方程式・指数不等式を解くことができる。〔技〕	小テスト 小テスト 課題 課題
第5 ～6時	底の変換公式 対数関数 対数関数とそのグラフ 対数関数の特徴 対数関数を含む方程式、不等式	底の変換公式の意味と必要性を理解している。〔知〕 対数関数のグラフの概形、特徴を理解している。〔知〕 対数関数の増減によって、大小関係や方程式・不等式を考察することができる、底と1の大小に注意して、対数関数を含む不等式を解くことができる。〔見〕〔技〕 対数の性質を用いる際に、真数が正であることに着目できる。〔技〕 やや複雑な対数方程式、対数不等式に積極的に取り組もうとする。〔関〕	小テスト 観察・課題 小テスト 観察・課題 観察・課題
	第7時	常用対数 常用対数 常用対数の応用	常用対数の定義を理解し、その利用について考察することができる。〔見〕〔知〕 n 桁の数、小数首位が第 n 位の数を、不等式で表現することができる。〔技〕 桁数の問題や小数首位問題などには、常用対数の利用が必要であることを理解している。〔知〕 x 軸方向、 y 軸方向に平行移動した対数関数のグラフをかくことができる。〔技〕

5 本時の指導（1／5時）

(1) 本時について

底の変換公式を用いることで、いろいろな底の対数を同じ底の対数で表せることを学び、その意味と価値を考える。また、対数関数の概形と特徴を学び、指数関数との関係に気付かせ、その有用性について考える。

(2) 本時の目標

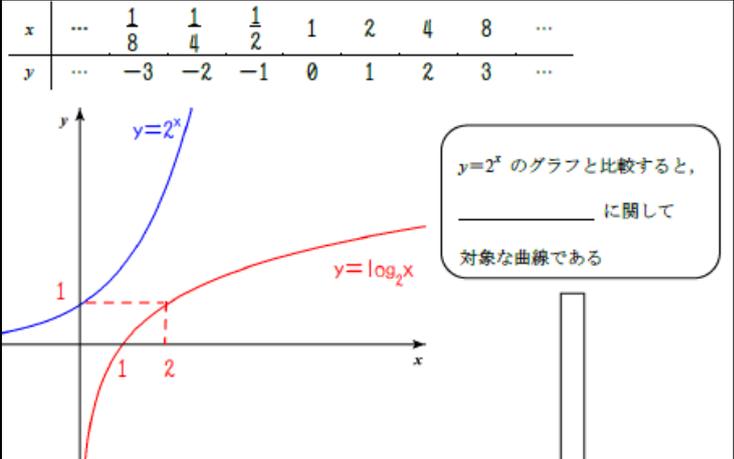
- ・底の変換公式の意味を理解し、活用できる。
- ・対数関数のグラフの概形や特徴を理解している。
- ・底の大きさと対数関数の増減の利用によって、大小関係を考察することができる。

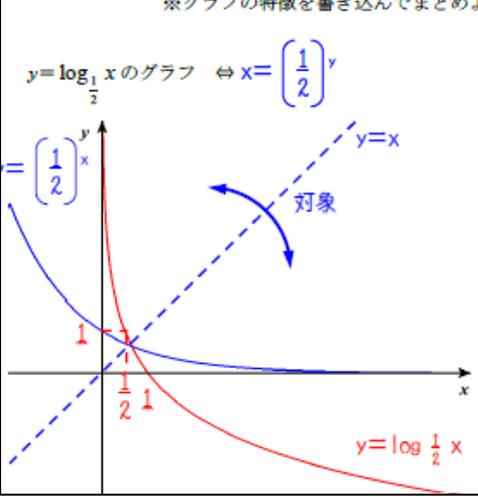
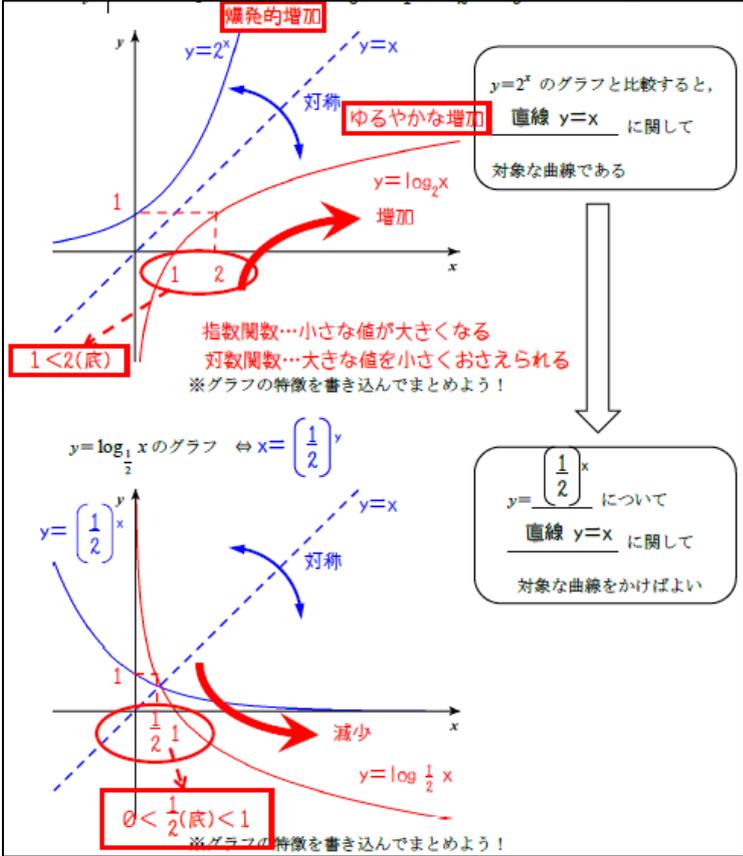
(3) 本時の評価規準

- ・底の変換公式を利用して、いろいろな底の対数の値を求めることができているか。
- ・対数関数の特徴を理解し、グラフの概形をかくことができているか。
- ・底の大きさと対数関数の増減の利用によって、大小関係を考察することができるか。

(4) 本時の展開

	指導内容	予想される生徒の反応	指導上の留意点
導入 (5分)	<p>○底の変換公式を板書し、証明を示す</p> <p>a, b, c は正の数で、$a \neq 1, c \neq 1$ とするとき、</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ </div> <p>(証) $\log_a b = p$ とすると、</p> $a^p = b$ <p>底を c とする対数をとると、</p> $\log_a a^p = \log_c b$ $p \log_a a = \log_c b$ $p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$		<ul style="list-style-type: none"> ・左辺を p とおき、黒板で証明する。生徒は教科書で確認する ・底は1ではない正の値であれば、任意の値に変換できることを強調する
展開 (10分)	<p>○ p154練習18の(1)を解説しながら解く 次の式を簡単にせよ。</p> <p>(1) $\log_4 8$</p> <p>○底を何に変換すればいいか?</p> <p>↓</p> <p>1ではない正の数なら何でもいい</p> <p>$4=2^2$ $8=2^3$ だから</p> <p>○底を2にそろえると うまくいくかも!</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$ $= \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}$ $= \frac{3}{2}$ </div> <div style="border-left: 1px dashed black; padding-left: 20px;"> <p><指数方程式を利用></p> $x = \log_4 8$ $4^x = 8$ $2^{2x} = 2^3$ $\therefore 2x = 3$ $x = \frac{3}{2}$ </div> </div> <p>※底を2にそろえて 指数を比べる</p> <p>○ $\frac{3}{2}$ の値の意味を考えさせ、指数方程式を用いた別解を紹介する</p>	<ul style="list-style-type: none"> ●底を何に変換すればよいか考える ●底を4や8とするが、うまく値を求められない ● $\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$ と $\log_2 \frac{8}{4}$ を間違えて公式を使ってしまう ●暗算で $\frac{3}{2}$ の値をだしてしまう 	<ul style="list-style-type: none"> ・底をどのような値に変換すればうまくいくか考えさせる ・底の変換公式で得られた値 $\frac{3}{2}$ の意味を考えさせた後、別解を提示し、比較させる ・計算し易くするために、今回は底を2にそろえたが、他の値でも求めることはできることを補足説明する ・暗算で値をだせる生徒には、公式の考え方と、自分の考え方を比較させて理解させる

	指導内容	予想される生徒の反応	指導上の留意点																																							
展開 (10分)	<p>○(2)(3)を生徒に解かせる</p> <p>(2) $\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$</p> <p>(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$ 積の形 ○底を何に変換すればいいか？</p> <p>$27=3^3$ だから底を 3 に変換</p> $\log_3 2 \cdot \log_2 27$ $= \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 2} = 3$ <p>○解答の式と底の変換公式を見比べる</p> <p>底の変換公式の両辺に $\log_c a$ をかけて</p> $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$ <p>※底の変換公式を変形した形になっている</p>	<ul style="list-style-type: none"> ●底をいろいろな値に変換して、試そうとする 	<ul style="list-style-type: none"> ・目標を持って、底を何に変換すればよいか考えさせる ・値を求めただけで終わりにさせず、式の形に注目させる ・底の変換公式を変形した形に気づかせ、底の変換公式を新たに認識させる 																																							
展開 (5分)	<p>対数関数とそのグラフ</p> <p>○予想プリントを配布し、$y=\log_2 x$ のグラフがどのような概形になるか予想させる</p> <p>○ヒントをだす</p> <p>$y=\log_2 x \Leftrightarrow x=2^y$</p> <p>$y=2^x$ の x と y をいれかえたもの</p>	<ul style="list-style-type: none"> ●x に $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ の値を代入してグラフを書こうとする ●x に $2, 4, 8, \dots$ の値を代入してグラフを書こうとする ●プリントを反転させる ●x 軸と y 軸を書き換える 	<ul style="list-style-type: none"> ・机間巡視 ・ひとりで考えずに、周りの生徒と相談して考えさせる ・できるだけ生徒だけで考えさせる 																																							
展開 (10分)	<p>○裏面の「まとめプリント」にまとめさせる</p> <p>○先に y の値、$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ を書き入れ、x の値を考えさせる</p> <p>$y=\log_2 x$ のグラフ $\Leftrightarrow x=2^y$ ※$y=2^x$ の x と y をいれかえた式</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>x</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>...</td></tr> <tr><td>y</td><td>...</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td></tr> </table> <p>○x の値を書き入れさせ、グラフをかかせる</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>x</td><td>...</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>...</td></tr> <tr><td>y</td><td>...</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td></tr> </table> 	x	y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	x	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	<ul style="list-style-type: none"> ●指数関数との対称性に気がつく 	<ul style="list-style-type: none"> ・裏面のまとめプリントに書き込むように指示する ・グラフ上の2点 (1, 0)、(2, 1) の座標を書き込ませる ・2は底の値であることを確認する
x																																		
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...																																	
x	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...																																	
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...																																	

	指導内容	予想される生徒の反応	指導上の留意点
	<p>○ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフとの対称性を利用して、 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフの概形を書かせる</p> 	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $y=2^x$ のグラフと比較すると、 <u>直線 $y=x$</u> に関して 対象な曲線である </div> <div style="text-align: center; font-size: 2em;">↓</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ について <u>直線 $y=x$</u> に関して 対象な曲線をかけばよい </div>	<ul style="list-style-type: none"> • 値を計算せずに、対称性に注目させて、グラフの概形をかかせる • イメージのつかない生徒には $y=x$ の直線で折るなどさせて考えさせる • グラフ上の2点 $(1, 0)$、$(\frac{1}{2}, 1)$の座標を書き込ませる • $\frac{1}{2}$ は底の値であることを確認させる • 定義域に注意させる
<p>まとめ (10分)</p>	<p>○ $y = \log_2 x$、$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ それぞれのグラフの特徴をつかみ、プリントに書き込ませる</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ● 底の値によって、増加関数、減少関数になることに気がつく ● 定義域が正の数全体であることに気がつく 	<ul style="list-style-type: none"> • 底の値と増加・減少の関係に注意させる • $1 < 2(\text{底}) \rightarrow$ 増加 • $0 < \frac{1}{2}(\text{底}) < 1 \rightarrow$ 減少 • であるときの底の値の範囲をグラフから、視覚的に認識させる • 真数条件が $x > 0$ であることをグラフから認識させる • 指数関数、対数関数のそれぞれの増加、減少の仕方に注目させ、それぞれを見比べさせる • 気付いたことをグラフに書き込ませる
	<p>○ 表面で予想したグラフと見比べて、新たに気付いたことをまとめさせる</p> <p>○ 時間があれば、指数関数や対数関数で表すことの利点を考えさせ、それぞれどのような現象に対して有効かを考えさせる</p>		