

数 学 科 指 導 案

学校名 埼玉県立熊谷高等学校

指導者 教諭・田 渕 常 夫

1 科目名 数学 A (単位数 3)

2 使用教科書 数学 A Advanced (東京書籍)

3 単元名 3章 図形の性質

4 単元の目標

中学校で学んだ幾何の性質を出発点とし、議論を積み上げ、図形の性質について理解させ、基本的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察する能力と幾何学的感覚を養い、数学の良さを認識できるようにするとともに、それらを活用する態度を育てる。

5 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
図形の性質に関心をもつとともに、それらの有用性を認識し、事象の考察に活用しようとしている。	図形の性質を用いて事象を考察し表現したり、その過程を振り返ったりすることなどを通して、数学的な見方や考え方を身につけている。	図形の性質を用いて事象を表現・処理・証明する技能を身につけている。	図形の性質に関する基本的な概念・定理を理解し、知識を身につけている。

6 指導と評価の計画

※評価の観点：a(関心・意欲・態度)、b(数学的な見方や考え方)、c(数学的な技能)、d(知識・理解)

学習内容	学習のねらい	評価の観点			
		a	b	c	d
3章 図形の性質[29]					
1 節 三角形の性質[9]					
1 三角形と比 (2)	中学校で学んだ三角形と比の定理と、その特別な場合としての中点連結定理を復習し、基本性質をもとに徐々に証明のしかたを身につける。 また、三角形の内角の二等分線と比、外角の二等分線と比の定理を理解し、それらの逆も成り立つことを理解する。		○		○
2 三角形の重心・外心・垂心・内心 (3)	三角形の重心・外心・垂心・内心の存在とその証明を理解する。また、外接円、内接円との関係を理解する。			○	○
3 三角形の比の定理(3)	チェバの定理とその逆、メネラウスの定理とその逆を理解し、活用できる。		○		○
問題 (1)					
2 節 円の性質 [9]					
1 円周角の定理 (1)	中学校で学んだ円周角の定理とその逆について確認する。		○		○
2 円に内接する四角形(2)	円に内接する四角形の定理と四角形の内接条件の定理を理解し、活用しながら図形に対する直観力・洞察力を養うとともに、図形の性質を論理的に考察し、的確に表現する能力を身につける。		○	○	○
3 接線と弦のつくる角(2)	円と接線に関する基本的な性質を復習する。さらに、接線と弦のつくる角の定理の証明をさまざまな方法で考え、図形に対する洞察力を豊かにする。			○	○
4 方べきの定理 (2)	円と点の位置関係が異なっても方べきの定理が成り立つことを理解し、図形に対する能力をさらに伸ばす。		○		○

学習内容	学習のねらい	評価の観点			
		a	b	c	d
5 2つの円 (1)	2つの円の位置関係を理解し、そこに現れる図形の性質について証明し、図形に対する見方を豊かにする。	○	○		
問題 (1)					
3節 作図 [5]					
1 基本的な作図 (2)	中学校において学習した基本的な作図や、平行四辺形の成立条件や三角形と比の性質をもとに、平行な直線や線分の内分点・外分点などを作図できる。	○		○	○
2 長さの作図 (2)	長さ1の大きさの線分が与えられたとき、2数の積や商および平方根などを、図形の性質を利用して作図で表現できる。		○	○	
問題 (1)					
4節 空間図形 [5]					
1 直線と平面 (3)	中学校において学習した空間における直線や平面の位置関係を踏まえ、三垂線の定理などを扱い、図形の性質を論理的に考察することができる。	○	○	○	○
2 多面体 (1)	オイラーの多面体定理などの多面体の基本的な性質を理解する。	○			○
問題 (1)					
練習問題 (1)					

7 本時の指導

- (1) 本時について オイラーの多面体定理を通して正多面体の理解を深める。
- (2) 本時の目標 正多面体が5種類に限ることを示す。オイラーの多面体定理を知る。
- (3) 本時の評価
 - ① 多面体、凸多面体、正多面体の定義を覚える。(知識)
 - ② オイラーの多面体定理の内容を理解し、種々の問題に適応できる。(知識・技能)
 - ③ 正多面体が5種類に限ることを知ったうえで、その形状がわかる。(知識)
 - ④ 幾何学的事象を代数的に表現し、代数的結果から幾何学的結果を得ることができる。(技能)
 - ⑤ 整数の性質に着目し不等式が解ける。(技能)
 - ⑥ 幾何学的規則性を発見できる。(技能)

本 時 の 展 開

	時間	指導内容	生徒の活動	指導上の留意点
導入	10 分	・多面体、凸多面体、正多面体の定義を確認し、オイラーの多面体定理を紹介する。	・PPT の画面を観ながら教科書 140、141 ページの内容を確認する。	・発問を投げかけながら、説明が単調にならないよう配慮する。
展開	35 分	・正多面体が 5 種類に限ることをオイラーの多面体定理を用いて示す。	①1 つの頂点に正 n 角形が k 個集まる正多面体を考え、 k と n の満たすべき条件を探す。 ②①で求めた条件より k と n の値を決定する。 ③オイラーの定理を用いて正多面体の面の数を決定する。	・PPT を用いながら、板書の分量を抑え、テンポよく授業を進める。 ・シンクペアシェアを用いて対話的な授業を形成する。その際、間違えることを気にせず、自分の考えを主張しやすいよう、発言した内容は汲み取ること心掛ける。 ・生徒の理解度に応じて、ヒントとなる考え方やフレーズを少しずつ提示する。 ・議論の仲介役となり、活発な議論を促す。 ・生徒からの発言を取り入れながら、黒板を効果的に用いて、情報共有を図りながら効率よく進める。 ・幾何学の学習なので、分かりやすくする場面と想像力を働かせる場面の両方のシーンを意図的に作り出す。
まとめ 発展	5 分	・正多面体が 5 種類に限ることを確認する。 ・代数方程式と正多面体の関係について触れる。	・5 種類の正多面体を視覚的に確認する。 ・神秘的な関係に触れる。	・本時の課題を通して学んだことを整理させる。 ・さらに、その先に向かって学びたい気持を芽生えさせたい。



多面体

数学A

3章 図形の性質

4節 空間図形

教科書 p.140～141



数学A 2学期期末考査

回	章	節	内容
第1回	3章 図形の性質	2節 円の性質	円周角 円に内接する四角形
第2回			接線と円の作る角 方べきの定理
第3回			方べきの定理の逆 2つの円
第4回		4節 空間図形	直線と平面
第5回			多面体
第6回		3節 作図	基本的な作図
第7回			長さの作図



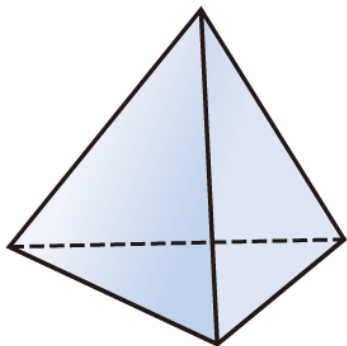
直方体や角錐のように、平面だけで囲まれた立体を
() という。

多面体は、その面の数によって、五面体、六面体などという。

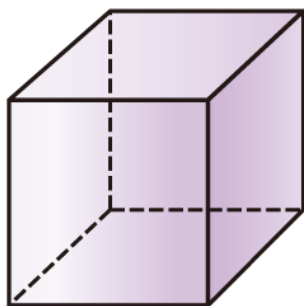
へこみのない多面体を () という。凸多面体のうち、どの面もすべて合同な正多角形であり、どの頂点にも同じ数の面が集まっているものを () という。

問題

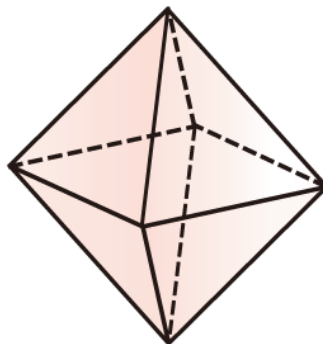
正多面体は何種類あるか。
また、それぞれの形状はどのようなものであるか。



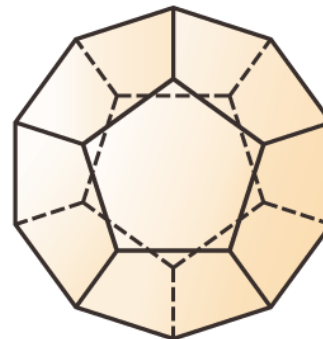
正四面体



正六面体
(立方体)



正八面体



正十二面体



正二十面体

正多面体の頂点の数, 辺の数, 面の数は次の表のようになる。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20



一般に、凸多面体の頂点の数、辺の数、面の数について、次の  が成り立つことが知られている。

オイラーの多面体定理

定理 凸多面体の頂点の数を v ，辺の数を e ，面の数を f とすると

$$v - e + f = 2$$



オイラーの多面体定理

定理 凸多面体の頂点の数を v ，辺の数を e ，面の数を f とすると

$$v - e + f = 2$$

例 3 オイラーの多面体定理が成り立つことを正八面体で確かめてみよう。

正八面体では

頂点の数 $v=6$ ，辺の数 $e=12$ ，面の数 $f=8$

であるから

$$v - e + f = 6 - 12 + 8 = 2$$



問6 すべての正多面体について、オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。

正四面体 $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$

正六面体 $v - e + f = 8 - 12 + 6 = 2$

正十二面体 $v - e + f = 20 - 30 + 12 = 2$

正二十面体 $v - e + f = 12 - 30 + 20 = 2$

となり、オイラーの多面体定理が成り立っている。



本日の課題

正多面体は凸多面体である。

そこで、正多面体が5種類に限ることをオイラーの多面体定理を用いて示せ。



正多面体とは

凸多面体のうち、次の条件を満たすもの

- I. どの面もすべて合同な正多角形であり,
- II. どの頂点にも同じ数の面が集まっている



面の形状と1つの頂点に集まる面の数

正多面体の1つの頂点に

I. 正 n 角形が

II. k 個集まっている

として考えてみよう。



k, n の満たすべき条件

- i. 正 n 角形の内角の1つの大きさを θ とするととき, 1つの頂点に集まる面の数が k 個であることに着目して, k, θ に成り立つ関係を求めよ
- ii. θ を n で表せ
- iii. k, n に成り立つ関係を求めよ



不等式 $kn - 2n - 2k < 0$
の整数解 (k, n) を求める

- i. 不等式を変形すると $(k - 2)(n - 2) < 4$
- ii. k, n のとりうる値の範囲を考える
凸多角形が存在するためには？
正多角形が存在するためには？



次に明らかにするものとは？

やっぱり、正多面体は5種類しかなさそうである。

正多面体を構成する正多角形と1つの頂点に集まる面の数は分かった。

次に明らかにする値は？

⇒ 面の数

面の数を求めるのに、利用できそうな定理はないか？



オイラーの多面体定理をどう利用するか？

オイラーの多面体定理

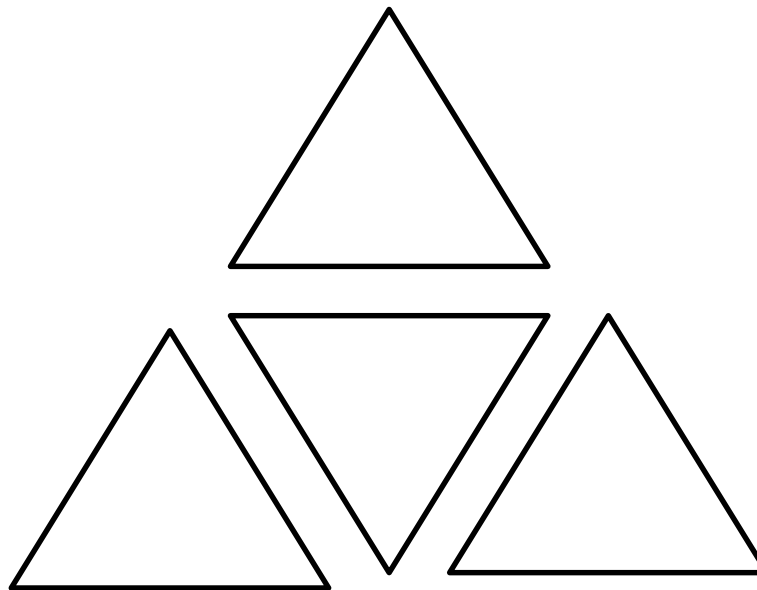
定理 凸多面体の頂点の数を v ，辺の数を e ，面の数を f とすると

$$v - e + f = 2$$

求めたいのはどの値？



v, e を f, n, k で表そう！



論理の順番はおかしいが、例えば・・・

正四面体の展開図を利用して規則性を考えてみよう



正多面体の面 f の数の決定！

オイラーの多面体定理

定理 凸多面体の頂点の数を v ，辺の数を e ，面の数を f とすると

$$v - e + f = 2$$

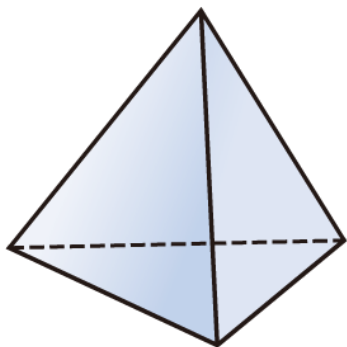
1つの頂点に集まる面の数 k	3	3	3	4	5
1つの面の頂点の数 n	3	4	5	3	3
正多面体の面の数 f					



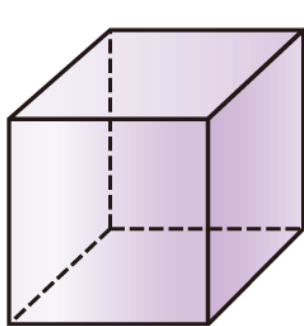
正多面体は5種類に限る！

1つの頂点に集まる面の数 k	3	3	3	4	5
1つの面の頂点の数 n	3	4	5	3	3
正多面体の面の数 f	4	8	20	6	12

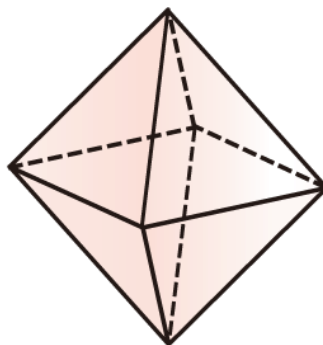
理論上5種類に限り、その5種類は実存する。



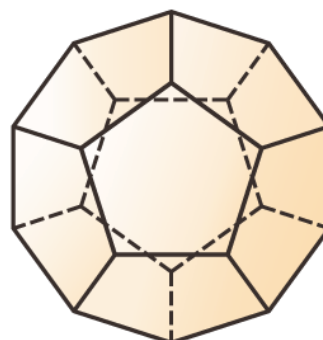
正四面体



正六面体
(立方体)



正八面体



正十二面体



正二十面体

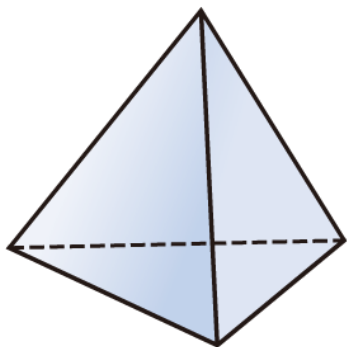


代数方程式の解の公式

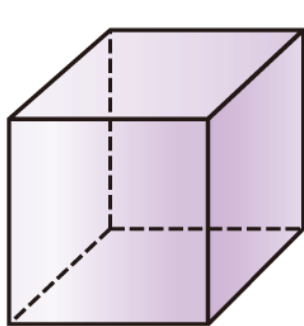
実は,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$n \geq 5 \text{ のとき, 解の公式は存在しないことと,}$$

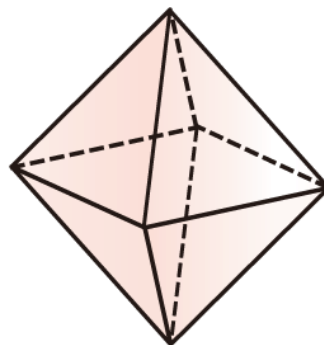
正多面体が5種類に限ることには深い関係が...



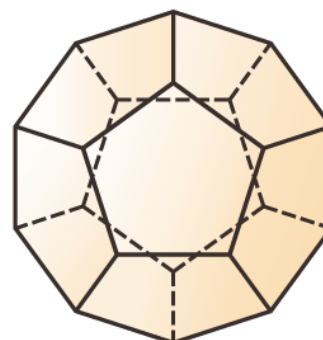
正四面体



正六面体
(立方体)



正八面体



正十二面体



正二十面体



本時の学びを整理しよう！

テーマは？

どんな知識・技能を学んだか？

どのくらい理解したか？

- ① 誰にでも説明できる
- ② 自分を理解してくれている人には説明できる
- ③ 説明できない

どのくらい習得したか？

- ① 自力で問題が解けた
- ② 助けを借いて問題が解けた
- ③ 解けなかった