Ⅱ　各教科の正答率、問題の内容及び所見・解説

６　数学（学校選択問題）

(1) 正答率

問題		配点	正答		一部正答		誤答		無答		通過率
			数	率(%)	数	率(%)	数	率(%)	数	率(%)	率＝得点計／(人数×配点) (%)
1	(1)	4	328	87.0	0	0.0	49	13.0	0	0.0	87.0
	(2)	4	255	67.6	0	0.0	121	32.1	1	0.3	67.6
	(3)	4	266	70.6	0	0.0	103	27.3	8	2.1	70.6
	(4)	4	150	39.8	12	3.2	201	53.3	14	3.7	41.4
	(5)	4	309	82.0	0	0.0	66	17.5	2	0.5	82.0
	(6)	4	123	32.6	0	0.0	200	53.1	54	14.3	32.6
	(7)①	4	340	90.2	0	0.0	37	9.8	0	0.0	90.2
	(7)②	6	9	2.4	13	3.4	210	55.7	145	38.5	3.5
	(8)①	4	315	83.6	10	2.7	52	13.8	0	0.0	84.9
	(8)②	7	2	0.5	30	8.0	196	52.0	149	39.5	2.9
2	(1)	5	257	68.2	23	6.1	66	17.5	31	8.2	70.9
	(2)	5	230	61.0	0	0.0	144	38.2	3	0.8	61.0
	(3)	5	85	22.5	0	0.0	173	45.9	119	31.6	22.5
	(4)	5	149	39.5	0	0.0	153	40.6	75	19.9	39.5
3	(1)	6	259	68.7	60	15.9	47	12.5	11	2.9	77.7
	(2)	5	178	47.2	0	0.0	151	40.1	48	12.7	47.2
	(3)	6	8	2.1	0	0.0	158	41.9	211	56.0	2.1
4	(1)	5	240	63.7	0	0.0	111	29.4	26	6.9	63.7
	(2)①	6	26	6.9	2	0.5	221	58.6	128	34.0	7.1
	(2)②	7	2	0.5	13	3.4	74	19.6	288	76.4	2.2

（小数点以下第２位を四捨五入しているため、%の合計が100にならない場合がある。）

(2) 問題の内容

$\boxed{1}$
(1)文字式の計算
(2)式の計算の利用
(3)連立方程式
(4)関数 $y = ax^2$ の値の変化
(5)日常生活や社会で数学を利用する問題
(6)図形の性質を利用して、線分の長さを求める
(7)２次方程式の解の公式
(8)根拠を明らかにして、筋道立てて説明する問題

$\boxed{2}$
(1)円の性質を利用した円周上の点の作図
(2)ヒストグラムと代表値に関する問題
(3)図形の性質を利用して、面積を求める
(4)正四角柱の展開図から、正四角柱の高さを求める

$\boxed{3}$
(1)図形の性質を利用した三角形の相似の証明
(2)立体の線分の長さを求める
(3)立体の体積を求める

4 (1) 関数 $y = ax^2$ の a の値を求める
(2) 三角形の面積比が４：１になる点の座標と回転体の体積を求める

(3) 所見・解説

1 中学校数学科の各領域に関する問題で、数学的な知識及び技能が確実に身に付いているかをみようとした。

(1)は、分数の形で表された文字式の計算である。誤答には、分母を払ってしまったものや分子を計算する際にマイナスの処理を間違えたものが多かった。文字式の計算を、確実にできるようにしたい。解答例は、以下のとおりである。

【解答例】

$$\frac{3x-y}{4}-\frac{2x-y}{3}=\frac{3(3x-y)-4(2x-y)}{12}=\frac{x+y}{12}$$

(2)は、式の値を求める問題である。与えられた式を因数分解して、そこに $x=1+\sqrt{3}$、$y=1-\sqrt{3}$ を代入して求める。式の値は、x や y の値を直接代入しても求められるが、因数分解するなどして与えられた式を変形してから代入すると、計算が簡単になる場合がある。解答例は、以下のとおりである。

【解答例】

$$\begin{aligned} x^2+4x-y^2+4 &= x^2+4x+4-y^2 \\ &= (x+2)^2-y^2 \\ &= (x+y+2)(x-y+2) \end{aligned}$$

この式に、$x=1+\sqrt{3}$、$y=1-\sqrt{3}$ を代入して、$8+8\sqrt{3}$

(3)は、連立方程式の計算である。Ａ＝Ｂ＝Ｃの形の連立方程式は、与えられた式から２つの等式をつくり、連立させて解く。解が分数になったため、戸惑った受検生もいたかもしれない。計算力をしっかりと身に付けたい。解答例は、以下のとおりである。

【解答例】

与えられた式から

$$\begin{cases} 6x-3y+7=4x+6y & \cdots① \\ 4x+6y=2x+3 & \cdots② \end{cases}$$

①から、$2x-9y=-7$ …③

②から、$2x+6y=3$ …④

③－④から、$-15y=-10$

$$y=\frac{2}{3}$$

$y=\frac{2}{3}$ を③に代入すると、$x=-\frac{1}{2}$

したがって、$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

(4)は、関数 $y=ax^2$ の値の変化に関する問題である。関数 $y=x^2$ のグラフをかいて、y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となるような x の変域を考える。x の変域は $a \leqq x \leqq a+2$ と示されているので、x の変域の幅は２である。

(5)は、日常生活や社会で数学を利用する問題で、樹形図をかいて場合の数を求める。解答例は学力検査問題の所見欄に示した。

(6)は、図形の性質を利用して線分の長さを求める問題である。この問題のポイントは、２組の相似な三角形を見いだすことができるかどうかである。解答例は、学力検査問題の所見欄に示した。

(7)は、２次方程式の解の公式を導く問題である。２次方程式の解の公式を導くのに、①がヒントになっている。受検生には、２次方程式　$ax^2 + bx + c = 0$　を２乗の形にするのは難しかったと思われるが、２次方程式の解の公式を導く過程は教科書にも載っているので、関心をもって、高校入学までにはしっかりと理解したい。

(8)は、素数に関する問題で、素数でない数をふるい落としていく操作や実験を通して、『差が２である２つの素数』を見つけ、その間にある数が６の倍数であることを説明する問題である。素数は、１とその数のほかに約数がない数で、その数より小さい自然数の積で表せない。①は与えられた表を使って、２の倍数、３の倍数、５の倍数、７の倍数をふるい落としていくと、素数だけが残るので、その中から『差が２である２つの素数』を見つける。なお、『差が２である２つの素数』は双子素数と呼ばれている。

②の『差が２である２つの素数』の間にある数が６の倍数であることの説明では、①の操作や実験が役に立つ。『差が２である２つの素数』は２の倍数ではないので、その間の数が必ず２の倍数である。また、『差が２である２つの素数』とその間の数を、連続する３つの数ととらえると、その中には必ず３の倍数があり、『差が２である２つの素数』は３の倍数ではないので、その間の数が３の倍数である。つまり、『差が２である２つの素数』の間の数は２の倍数かつ３の倍数だから、６の倍数である。

$\boxed{2}$　「図形」及び「資料の活用」に関する問題で、数学的な知識及び技能、数学的な見方や考え方を活用することができるかをみようとした。

(1)は、円周角の定理を利用して∠ＡＰＢ＝90°となる点Ｐを作図する問題である。まず、２点Ａ、Ｂを結び、線分ＡＢの垂直二等分線をかく。次に、線分ＡＢと垂直二等分線の交点を中心として、線分ＡＢを直径とする円をかく。このとき、円と直線ℓとの交点が点Ｐである。

(2)は、ヒストグラムと代表値に関する問題である。最頻値、中央値、平均値を手がかりに最も適切なヒストグラムを選ぶ。このクラスの得点の最頻値は８点であるから、**ウ**は誤りである。また、中央値は８．５点であるから、このクラスの上位20番目の生徒は９点で、21番目の生徒は８点である。よって、９点と10点の生徒の合計は20人で、**イ**も誤りである。さらに、平均値は８．４点であるから、このクラスの得点の合計は336点で、合計が344点の**ア**は誤りである。

(3)は、図形の性質を利用して、かげをつけた部分の面積を求める問題である。点Ａから辺ＢＣに垂線をひくと、直角三角形を見いだすことができる。点Ａからひいた垂線と辺ＢＣとの交点をＦとすると、ＢＦ＝６、ＡＢ＝12で、三平方の定理より、ＡＦ ＝ $6\sqrt{3}$ である。よって、△ＡＢＦは１：２：$\sqrt{3}$ の直角三角形だから、∠ＡＢＦ＝60°で、∠ＣＯＥ＝120°、ＯＣ＝$3\sqrt{3}$ である。したがって、かげをつけた部分の面積は、四角形ＥＢＣＯからおうぎ形ＯＥＣをひいて、$27\sqrt{3} - 9\pi$ cm^2 と求めることができる。解答例は、学力検査問題の所見欄に示した。

(4)は、正四角柱の展開図から底面や高さにあたる部分を見いだして、正四角柱の高さを求める問題である。正四角柱の高さをx cmとすると、底面の正方形の１辺は$2x$ cmで、展開図の正方形の対角線の長さは$6x$ cmである。展開図の正方形の１辺の長さは12cmだから、$x = 2\sqrt{2}$ cmである。

$\boxed{3}$　空間図形についての観察、操作や実験などの活動を通して、図形について見通しをもって論理的に考察し表現することができるかをみようとした。

(1)は、△ＡＧＦと△ＡＦＩが相似であることを証明する問題である。図１のように、対角線ＡＦとＤＧをかき入れると証明する三角形を把握しやすい。また、∠ＡＦＧ＝90°である根拠は辺ＦＧが平面ＡＢＦＥに垂直だから、同じ平面上にある線分ＡＦに対しても垂直になるからである。

(2)は、三平方の定理と相似な図形の性質を利用して、線分ＦＩの長さを求める問題である。△ＡＦＧにおいて、ＡＦ＝$6\sqrt{2}$，ＦＧ＝６だから、三平方の定理よりＡＧ＝$6\sqrt{3}$ である。また、△ＡＧＦと△ＡＦＩは相似だから、ＡＧ：ＧＦ＝ＡＦ：ＦＩ。よって、ＦＩ＝$2\sqrt{6}$ である。

(3)は、４つの点Ａ、Ｆ、Ｉ、Ｃを頂点とする立体の体積を求める問題である。この問題は、４つの点Ａ、Ｆ、Ｉ、Ｃを頂点とする立体をどのようにとらえるかで解き方が変わってくる。ここでは、そのうちの一つを紹介する。

△ＡＦＩは平面ＡＦＧＤ上にあるので、△ＡＦＩを底面とみたときのこの立体の高さは、点Ｃから平面ＡＦＧＤにひいた垂線である。すなわち、対角線ＣＨとＤＧの交点をＪとしたとき、線分ＣＪが高さとなる（図２参照）。よって、４つの点Ａ、Ｆ、Ｉ、Ｃを頂点とする立体は、底面が△ＡＦＩで、高さがＣＪの三角錐だから、体積は24 cm^3である。

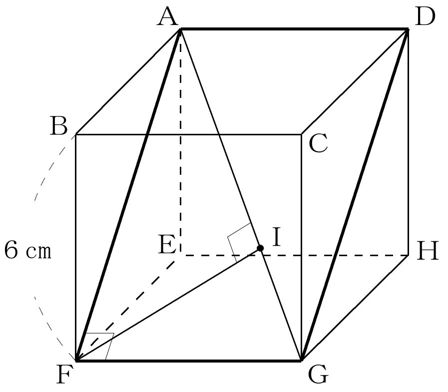

図１

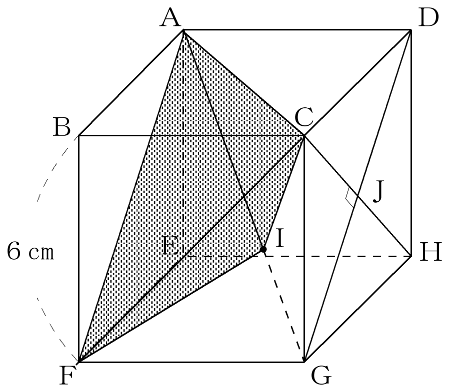

図２

$\boxed{4}$ 関数$y=ax^2$のグラフや点の座標から、aの値や回転体の体積を求めることを通して、図形や関数について総合的に考察することができるかをみようとした。

(1)は、関数$y=ax^2$のaの値を求める問題である。点Ａの座標は（－２、４a）、点Ｂの座標は（４、16a）だから、直線ＡＢの傾きは２aである。また、直線ＡＢはy軸と点Ｃ（０、２）で交わるので、直線の式は$y=2ax+2$と表せる。直線ＡＢは点Ａ（－２、４a）を通るので、$y=2ax+2$に$x=-2$、$y=4a$を代入すると、aは$\frac{1}{4}$と求められる。

(2)①は、△ＯＡＢと△ＢＤＥの面積の比が４：１になるような点Ｐのx座標を求める問題である。この問題は学力検査問題の大問４(3)と同じ問題で、正答例の他に次のような別解もある。

【別解】

点Ｐのx座標をtとおくと、$0 \leqq t \leqq 4$…①

直線ＡＢの式は$y=\frac{1}{2}x+2$、直線ＯＢの式は$y=x$だから、

点Ｄの座標は（t、$\frac{1}{2}t+2$）、点Ｅの座標は（t、t）と表せる。

よって、$\triangle \mathrm{BDE}=\frac{1}{2}\times \mathrm{DE}\times(4-t)$

$=\frac{1}{4}(4-t)^2$

また、△ＯＡＢ＝６だから、 △ＯＡＢ：△ＢＤＥ＝４：１より、

$6:\frac{1}{4}(4-t)^2=4:1$

ゆえに、 $t=4\pm\sqrt{6}$

したがって、①より点Ｐのx座標は、$4-\sqrt{6}$

(2)②は、△ＢＤＥを、辺ＢＥを軸として１回転させてできる立体の体積を求める問題である。この問題のポイントは、点Ｄから辺ＢＥに垂線をひき交点をＦとしたとき、△ＢＤＥを１回転させてできる立体が、線分ＤＦを半径とする円を共通の底面にもつ円錐を２つあわせたものととらえることができるかどうかである。△ＤＥＦは、ＤＦ＝ＥＦの直角二等辺三角形であるから、ＤＦ＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$、ＥＢ＝$2\sqrt{3}$である。よって、求める立体の体積は$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\ \mathrm{cm}^3$である。